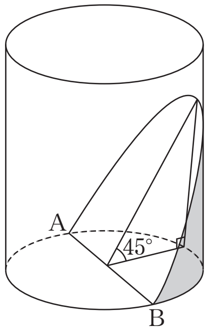
PART2 断面図と立体の体積

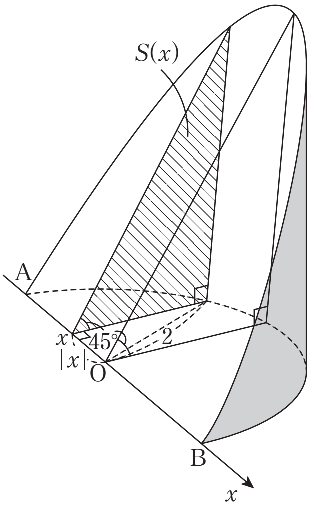
要点整理と公式

要点 ① 断面図と立体の体積

ある立体を適切な平面で切ったときにできる断面図の面積を用いて，体積を求める。



(ex) 底面の半径が 2，高さが 3 の直円柱がある。この直円柱の底面の直径 AB を含み，底面と 45° の角をなす平面で，この直円柱を 2 つに分けるとき，小さい方の立体の体積を求める。



底面の中心 O を原点とし，直線 AB を x 軸とする。

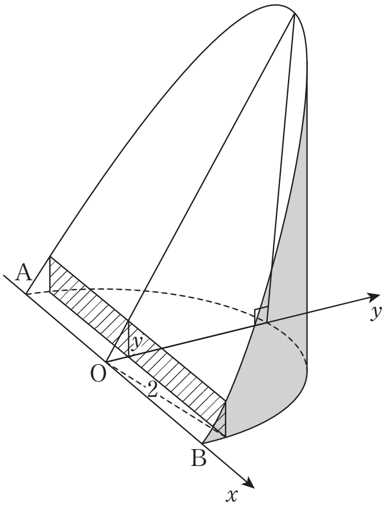
x 軸に垂直で，x 軸と座標 x で交わる平面で小さい方の立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}(\qquad\quad)^2=\frac{1}{2}(4-x^2)$$

よって，求める体積 V は

$$V=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx=2\int_{0}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx$$

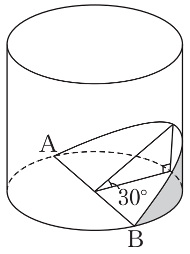
$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$$



x 軸に垂直な平面で切る方法以外に，右図のように y 軸に垂直な平面で切る方法などがある。切り方によって，断面積を求める際や，積分で体積を求める際などの煩雑さが異なる。

[MEMO]

2 底面の半径が 3，高さが 3 の直円柱がある。この直円柱の底面の直径 AB を含み，底面と 30° の角をなす平面で，この直円柱を 2 つに分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。



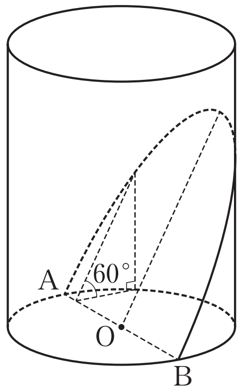
Point Pickup

断面図と立体の体積

適切な座標軸を定め，その座標軸と垂直な平面で切ったときの断面積 $S(x)$ を求めることにより，立体の体積 V を $V=\int_a^b S(x)dx$ によって求めることができる。

第21講 PART2 確認問題

1 底面の半径が2，高さが5の直円柱がある。この直円柱の底面の直径ABを含み，底面と60°の角をなす平面で，この直円柱を2つに分けるとき，小さい方の立体の体積Vを求める。



底面の中心を原点Oとし，直線ABをx軸とする。
x軸に垂直で，x軸と座標xで交わる平面で立体を切ったときの断面積を$S(x)$とすると，

$$S(x)=\frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}\left(\boxed{ウ}-x^2\right)$$

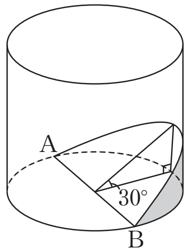
よって，求める体積Vは，

$$V=\int_{-\boxed{エ}}^{\boxed{エ}}S(x)dx$$

$$=\frac{\boxed{オカ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$$

PART2 断面図と立体の体積

2 底面の半径が 3，高さが 3 の直円柱がある。この直円柱の底面の直径 AB を含み，底面と 30° の角をなす平面で，この直円柱を 2 つに分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。

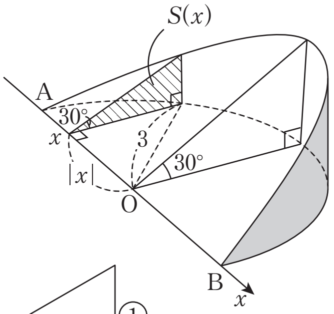


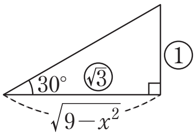
[解答]

小さい方の立体の体積を考える。底面の中心 O を原点とし，直線 AB を x 軸とする。

x 軸に垂直で，x 軸と座標 x で交わる平面で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)$$





よって，求める体積 V は

$$V=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{3}\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=6\sqrt{3}$$

第21講 PART2 確認問題 解答

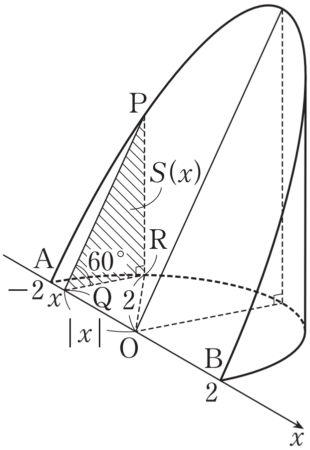
1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：4，エ：2，

オカ：16，キ：3，ク：3

[解説]

断面は，次の図のような直角三角形である。



ここで，$\mathrm{QR}=\sqrt{4-x^2}$

$$\mathrm{PR}=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}=\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}$$

であるから，

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot\mathrm{PR} \quad \text{[A]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)}$$

[A]　まずは，断面積 $S(x)$ を求める。

よって，求める体積 V は，

$$V=\int_{-2}^{2}S(x)dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)dx$$

[B]　底面の半径が 2 より，
$-2\leqq x\leqq 2$
$S(x)$ を -2 から 2 まで積分する。

$$=2\int_{0}^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)dx \quad \text{[C]}$$

$$=\sqrt{3}\int_{0}^{2}(4-x^2)dx$$

[C]　$f(x)$ が偶関数のとき，
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$$=\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\sqrt{3}\left(8-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{3}}$$